DAUGAVPILS PEDAGOĢISKAIS INSTITŪTS

MATEMĀTIKAS MĀCĪŠANAS JAUTĀJUMI

3. laidiens

IZDEVNIECĪBA «ZVAIGZNE»
RĪGA 1976

ДАУГАВПИЛССКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗВАЙГЗНЕ»
РИГА 1976

Доказательство для случая $4n+1$ также элементарно, но для настоящего изложения оно затруднительно.

Отметим в заключение, что исследования относительно представления простых чисел в виде квадратичной функции, даже для случая n^2+1, где n пробегает все натуральные значения, до сих пор остаются безуспешными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М., «Наука», 1972. 167 с.
2. *Михелович Ш. Х.* Теория чисел. М., «Высшая школа», 1967. 336 с.
3. *Михелович Ш. Х.* Материалы для факультативных занятий по дополнительным вопросам арифметики, ч. 1. Даугавпилс, 1973. 178 с.

Ш. Х. Михелович

К решению задач с помощью сравнений

I.

До недавней реформы школьного математического образования учащиеся, как правило, сравнениями не пользовались, а о малой теореме Ферма (МТФ) узнавали лишь как о следствии бинома Ньютона.

В настоящее время положение изменилось. Изучение сравнений предусматривается на факультативных занятиях в VII—VIII классах. Материал этот, как известно, доступен для понимания учащихся и воспринимается ими с интересом.

Согласно программам факультативных курсов сравнения явно не включаются в «Дополнительные вопросы арифметики целых чисел» для VII класса. Однако ряд учителей старается применять сравнения как можно раньше. Это и понятно, так как сравнения весьма эффективны при решении многих задач теории делимости.

В наиболее распространенном пособии для факультативных занятий по данной тематике [1] сравнения вводятся в § 5—6 сразу же после теоремы о делении с остатком в § 4.

Из свойств сравнений указываются следующие:

1) $a\equiv b\,(m)\Longleftrightarrow a-b\,|\,m$[1];

2—3) сравнения можно почленно складывать и умножать.

Приводятся следствия:

1) $a\equiv b\,(m)\Rightarrow a^n\equiv b^n\,(m)$;

2) для многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами

$$a\equiv b\,(m)\Rightarrow f(a)\equiv f(b)\,(m).$$

Простое, но часто употребляемое свойство, что в сравнении можно заменять слагаемые и множители сравнимыми числами по данному модулю, не выделено.

[1] Символом $a\,|\,b$ будем обозначать, что a делится на b, а символом $a\nmid b$ — что a не делится на b.

В § 7 изучается периодичность остатков при возведении в степень.

В § 8 вводится понятие взаимно простых чисел и доказываются теоремы:

1) если $(a, b)^1 = 1$, то существуют два таких целых числа x и y, что $ax + by = 1$;

2) $a|b$, $a|c$, $(b, c) = 1 \Rightarrow a|bc$;

3) теорема Евклида $ab|c$, $(a, c) = 1 \Rightarrow b|c$.

Параграфы сопровождаются упражнениями (§ 4 — упр. 16—39, § 6 — упр. 40—48, § 7 — упр. 49—57, § 8 — упр. 58—104), решение которых предусматривается с указанных позиций. Теоремы о том, что

$$(a, c) = 1,\ (b, c) = 1 \Rightarrow (ab, c) = 1;$$
$$ad \equiv bd(m),\ (d, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b(m),$$

которыми обычно пользуются для доказательства МТФ и которые нетрудно получить из теорем 1, 3 § 8, не отмечены в пособии. Сама МТФ даже не упоминается.

Понятие НОД вводится лишь в § 11, там же доказывается теорема

$$a|c, b|c \Longleftrightarrow (a, b)\,|\,c$$

и рассматривается алгоритм Евклида, однако свойство НОД

$$(ak, bk) = k(a, b)$$

не указывается.

Нам представляется, что указанные упражнения следует решать с более широких позиций. Мы имеем в виду применение МТФ, ее следствия и других теорем, упомянутых выше. При этом, чтобы не откладывать решение задач, можно часть используемых свойств отметить вначале без доказательства, а затем постепенно рассматривать и их доказательства, решая параллельно упражнения с помощью сравнений. Таким образом, увеличивается срок использования сравнений, что, конечно, необходимо и полезно для приобретения соответствующих навыков в обращении с ними.

Недостаточно в пособии используются отрицательные вычеты. Между тем как раз их применение значительно упрощает решение задач со сравнениями. Кроме того, учащиеся, пользуясь отрицательными вычетами, приобретают хорошие навыки в обращении с положительными и отрицательными числами. В настоящее время, когда учащиеся с отрицательными числами знакомятся уже в V классе, применение отрицательных вычетов и вполне доступно, и весьма полезно.

[1] Символом (a, b) будем обозначать наибольший общий делитель (НОД) чисел a и b.

По решению упражнений в пособии имеются образцы. Однако следование применительно ко всем 24 упражнениям § 4 тому образцу, который приводится в пособии (пример 1, с. 12: доказать, что при любом целом n число $n^3 - n$ делится на 6), не было бы целесообразно. Такой образец решения больше подходит для того, чтобы противопоставить ему аппарат сравнений.

В самом деле, после разбора указанного решения, которое занимает половину страницы, с определенным облегчением будет воспринято следующее. Число

$$N = n^3 - n = (n-1)\,n\,(n+1)$$

является произведением трех последовательных целых чисел. Так как при делении на 3 могут получиться остатки[1] 0, 1, −1, то по модулю 3 имеем:

$$\begin{array}{r@{\ }l}
n-1 \equiv & 0,\quad 1,\ -1;\\
n \equiv & 1,\ -1,\quad 0;\\
n+1 \equiv & -1,\quad 0,\quad 1;\\
\hline
N \equiv & 0,\quad 0,\quad 0.
\end{array}$$

Во всех случаях $N|3$. Аналогично получаем, что $N|2$, поскольку в N входит и произведение двух последовательных целых чисел.

Итак, $N|2$, $N|3 \Rightarrow N|6$.

Еще большее впечатление оставляет решение этого же примера, если воспользоваться следствием МТФ. Согласно этому следствию имеем:

$$n^2 \equiv n(2) \Rightarrow n^3 \equiv n^2 \equiv n(2) \Rightarrow N = n^3 - n\,|\,2;$$
$$N = n^3 - n \equiv 0(3) \Rightarrow N|3.$$

Итак, можем, как и выше, заключить, что $N|6$.

Мы считаем, что примеры к § 4 следует приберечь для использования аппарата сравнений.

Вряд ли следует также заниматься после ознакомления со сравнениями и их простейшими свойствами в § 5—6 повторным решением 12 предыдущих задач (согл. упр. 41) с позиции только этих свойств. Сказанное относится и к части других упражнений № 40—48.

[1] Остатки будем понимать в смысле наименьших вычетов класса по абсолютному значению.

Кстати, и здесь хотелось бы вместо решения, данного в пособии для примера 3 на с. 17 (доказать, что если $a^2+b^2+c^2$ делится на 9, то хотя бы одно из чисел a^2-b^2, a^2-c^2, b^2-c^2 делится на 9), предложить несколько иное.

По модулю 9 имеем

$$a\equiv 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4$$

и аналогично для b и c. Поэтому

$$a^2\equiv 0,\ 1,\ 4,\ -2;$$

$$b^2\equiv 0,\ 1,\ 4,\ -2;$$

$$c^2\equiv 0,\ 1,\ 4,\ -2.$$

Отсюда следует, что

$$a^2+b^2+c^2\equiv 0$$

только в тех случаях, когда выбираются тройки значений

$$0, 0, 0;\ 1, 1, -2;\ 4, 4, 1;\ -2,\ -2,\ 4.$$

Но в каждом из этих случаев хотя бы одно из чисел

$$a^2-b^2,\ \ a^2-c^2,\ \ b^2-c^2$$

сравнимо с нулем, т. е. делится на 9.

Мы сомневаемся также в целесообразности изучать далее в § 7 периодичность остатков при возведении в степень и применять именно эти свойства к решению упражнений № 49—57, в то время как МТФ для них в ряде случаев более эффективна.

Наконец, после ознакомления в § 8 со свойствами взаимно простых чисел пользоваться только предыдущими свойствами при решении упражнений № 58—104 и даже эти задачи решать таким образом, без МТФ и без широкого привлечения отрицательных вычетов, мы считаем также нецелесообразным.

При таком подходе учащиеся вряд ли сумеют в течение шести занятий, отведенных данному факультативу в VII классе, решить многие из упражнений № 16—104.

Иначе получается, если на отдельных этапах изучения материала показать лишь отдельные примеры применения результатов к задачам, дать прочувствовать неудобство скромных предпосылок, а затем на этом фоне, без особого промедления, перейти к эффективным способам, заинтересовать ими учащихся и дать им возможность поупражняться в их применении.

Именно на такой основе следует, на наш взгляд, решать упражнения № 16—104 к § 4—8 пособия, которым мы хотим уделить внимание в данной статье.

Возможно, по причине использования лишь ограниченных средств решение указанных упражнений вызывает значительные трудности не только со стороны учащихся, но часто и со стороны учителей.

Можно поэтому приветствовать, что в новом издании сборника [2] помещены ответы и указания к части упражнений. Они охватывают 35 из обсуждаемых задач. Но, на наш взгляд, представляет интерес ознакомить учителя со всеми решениями, привлекая для этой цели в ряде случаев более широкие возможности аппарата сравнений и теории делимости, чем те, которые использованы авторами обсуждаемой статьи. Мы имеем в виду те предпосылки, которые указаны выше.

Ниже приводятся такие решения. Ради полноты мы включили и те упражнения, против решений которых в сборнике [2] у нас существенных возражений нет. Для удобства читателя отмечены и сами задачи.

II.

РЕШЕНИЕ УПРАЖНЕНИЙ.

16) Докажите, что при любом n число $N=n^2+5n$ делится на 6.

Поскольку $N\equiv n^3-n$ (6), то утверждение доказано решением примера 1 на с. 12 пособия.

17) Докажите, что при любом целом n число $N=n^3+11\,n$ делится на 6.

$$\left.\begin{array}{l} N\equiv n^3-n\,(2)\Rightarrow N\,|\,2 \\ N\equiv n^3-n\,(3)\Rightarrow N\,|\,3 \end{array}\right\}\Rightarrow N\,|\,6.$$

18) Докажите, что при любом целом n число $N=n^3+3n^2+2n$ делится на 6.

$$\left.\begin{array}{r} N\equiv n^3-n^2\equiv n^2(n-1)\ (\mathrm{mod}\ 2)\Rightarrow N\,|\,2 \\ N\equiv n^3-n\,(3)\Rightarrow N\,|\,3 \end{array}\right\}\Rightarrow N\,|\,6.$$

19) Докажите, что при любом целом n число $N=n^2+n$ четно.

$$N=n(n+1)\Rightarrow N\,|\,2.$$

20) Докажите, что если $a>b>0$, то остаток, который дает число a при делении на b, меньше $\frac{a}{2}$.

$$a=bq+r; \quad 0\leqslant r<b;$$
$$a>b>0\Rightarrow q\geqslant 1;$$
$$r<b,\ 1\leqslant q\Rightarrow r<bq\Rightarrow 2r<r+bq, \text{ т. е. } 2r<a\Rightarrow r<\frac{a}{2}.$$

21) При каких n число n^2-1 делится на 3?

При делении на 3 могут быть остатки 0, ± 1. Поэтому имеем по модулю 3

$$\begin{array}{r} n\equiv 0,\ \pm 1; \\ n^2\equiv 0,\quad 1; \\ \hline n^2-1\equiv -1,\ 0. \end{array}$$

Итак, $n^2-1|3$, если $n\nmid 3$ и только в этом случае.

22) Докажите, что если числа a и b не делятся на 3, но дают одинаковые остатки при делении на 3, то число $ab-1$ делится на 3. Обратно, если $ab-1$ делится на 3, то числа a и b не делятся на 3 и дают одинаковые остатки при делении на 3.

По условию 1-го утверждения имеем по модулю 3

$$a\equiv\pm 1; \quad b\equiv\pm 1; \quad \Rightarrow ab\equiv 1\Rightarrow ab-1|3.$$

Условие обратного утверждения можно записать так: $ab\equiv 1\ (3)$, поэтому ни один из сомножителей $\not\equiv 0\ (3)$, иначе $ab\equiv 0\ (3)$. Далее, если при делении чисел a и b на 3 получаются разные остатки, то по модулю 3 имеем

$$a\equiv\pm 1; \quad b\equiv\mp 1\Rightarrow ab\equiv -1,$$

что противоречит условию.

23) Докажите, что если числа a и b не делятся на 3 и дают разные остатки при делении на 3, то число $ab+1$ делится на 3. Обратно, если $ab+1$ делится на 3, то числа a и b не делятся на 3 и дают разные остатки при делении на 3.

Согласно условию 1-го утверждения по модулю 3 имеем

$$a\equiv\pm 1; \quad b\equiv\mp 1\Rightarrow ab\equiv -1\Rightarrow ab+1|3.$$

По условию обратного утверждения $ab\equiv -1\ (3)$, поэтому ни один из сомножителей $\not\equiv 0\ (3)$, иначе $ab\equiv 0\ (3)$. Далее, если

числа a и b при делении на 3 давали бы одинаковые остатки, то мы имели бы по модулю 3

$$a\equiv\pm 1; \quad b\equiv\pm 1\Rightarrow ab\equiv 1,$$

но это противоречит условию.

24) Докажите, что каковы бы ни были целые числа a и b, число $N=ab(a^2-b^2)$ всегда делится на 3.

$N=a^3b-ab^3$. Но по следствию МТФ по модулю 3 имеем

$$\begin{array}{r} a^3\equiv a; \\ b\equiv b^3; \\ \hline a^3b\equiv ab^3\Rightarrow a^3b-ab^3|3. \end{array}$$

25) Докажите, что каковы бы ни были целые числа a и b, число $N=ab(a^2-b^2)(4a^2-b^2)$ всегда делится на 5.

По модулю 5

$$N\equiv -ab(a^2-b^2)(a^2+b^2)\equiv -ab(a^4-b^4)\equiv ab^5-a^5b.$$

По следствию МТФ имеем по модулю 5

$$\begin{array}{r} a\equiv a^5; \\ b^5\equiv b; \\ \hline ab^5\equiv a^5b\Rightarrow ab^5-a^5b|5. \end{array}$$

26) Докажите, что каковы бы ни были целые числа a и b, число $ab(a^4-b^4)$ всегда делится на 5.

В предыдущей задаче установлено, что $-ab(a^4-b^4)|5$, поэтому и $ab(a^4-b^4)|5$.

27) Докажите, что при любом целом n число $N=n^2(n^2-1)$ делится на 4.

$$N=(n-1)nn(n+1), \quad (n-1)n|2, \quad n(n+1)|2\Rightarrow N|4.$$

28) Докажите, что при любом целом n число n^5-n делится на 5.

По следствию МТФ.

29) Докажите, что при любом целом n число $N=n(n^6-1)$ делится на 7.

$$N=n^7-n\equiv 0\ (7).$$

30) Докажите, что если хотя бы одно из чисел a, b не делится на 7, то и число a^2+b^2 не делится на 7.

Пусть $a\nmid 7$, тогда по модулю 7 возможно:

$$a\equiv\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3,$$

откуда

$$a^2 \equiv 1, \quad 4, \quad 2.$$

При любом b:

$$b^2 \equiv 0, \quad 1, \quad 4, \quad 2.$$

Поэтому

$$a^2 + b^2 \not\equiv 0 \ (7).$$

31) Докажите, что при любом целом n число $N = n(2n+1)(7n+1)$ делится на 6.

$$\left.\begin{array}{l} N \equiv n(n+1) \pmod 2 \Rightarrow N|2 \\ N \equiv n(-n+1)(n+1) \equiv -(n-1)n(n+1) \pmod 3 \Rightarrow N|3 \end{array}\right\} \Rightarrow N|6.$$

32) Числа a и b не делятся на c. В каком случае $a-b$ делится на c? В каком случае $a+b$ делится на c?

Можно считать, что c положительно.

$$a = cq + r, \quad 0 < r < c;$$

$$\frac{b = cq_1 + r_1, \ 0 < r_1 < c;}{a - b = c(q - q_1) + (r - r_1).}$$

Отсюда видно, что $a-b$ делится на c в том и только в том случае, когда $r - r_1 | c$. Но так как $|r - r_1| < c$, то $r - r_1 = 0$, т. е. $r = r_1$ или a и b равноостаточны.

Во втором случае a и $(-b)$ равноостаточны.

33) Докажите, что каковы бы ни были целые числа a, b, c, число $N = a^2 + b^2 + c^2 + 1$ не делится на 8.

По модулю 8 имеем: $a, b, c \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4$,

$$a^2, b^2 \ c^2 \equiv 0, 1, 4 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \not\equiv 7 \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \not\equiv 0, \text{ т. е. } N \nmid 8.$$

34) Докажите, что если a нечетно, то $N = a^2 - 1$ делится на 8.

1-е решение. Если a нечетно, то $a = 2k + 1$,

$$a^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1); \quad k(k+1)|2 \Rightarrow N|8.$$

2-е решение. Поскольку a нечетно, то по модулю 8 имеем

$$a \equiv \pm 1, \quad \pm 3;$$

$$a^2 \equiv 1;$$

$$a^2 - 1 \equiv 0, \text{ т. е. } N|8.$$

35) Докажите, что если m и n — нечетные числа, то число $N = m^2 - n^2$ делится на 8.

1-е решение. Поскольку m и n нечетны, по модулю 8 имеем

$$m, \ n \equiv \pm 1, \ \pm 3;$$

$$m^2, n^2 \equiv 1;$$

$$m^2 - n^2 \equiv 0, \ N|8.$$

2-е решение. N можно представить в форме $N = (m^2 - 1) - (n^2 - 1)$; по упр. № 34 $m^2 - 1|8$, $n^2 - 1|8$, поэтому $N|8$.

36) Докажите, что если сумма трех целых чисел делится на 6, то и сумма их кубов делится на 6.

Пусть $a + b + c \equiv 0$ (6). В примере 1 на с. 12 пособия доказано, что $a^3 \equiv a$ (6), поэтому

$$a^3 + b^3 + c^3 \equiv a + b + c \equiv 0 \ (6).$$

37) Даны два трехзначных числа, причем ни одно из них не делится на 37, а сумма их делится на 37. Приписав одно из чисел к другому, получаем некоторое шестизначное число.

Докажите, что оно делится на 37.

Имеем $N_1 = \overline{abc} \nmid 37$, $N_2 = \overline{def} \nmid 37$, $N_1 + N_2 | 37$; поэтому, поскольку $10^3 \equiv 1$ (37), получаем

$$N = \overline{abcdef} = 10^3 N_1 + N_2 \equiv N_1 + N_2 \ (37), \text{ т. е. } N|37.$$

38) Из трех различных цифр получают шесть трехзначных чисел, всевозможным образом переставляя эти цифры (например: 123, 132, 213, 231, 312, 321). Докажите, что если среди этих шести чисел найдется число, делящееся на 37, то обязательно среди них будут и еще два числа, делящиеся на 37.

Пусть $\overline{abc}$ — одно из шести указанных чисел, которое делится на 37. Тогда и $\overline{bca}$, и $\overline{cab}$ делятся на 37. В самом деле,

$$\overline{bca} = \overline{bc} \cdot 10 + a = \overline{abc} \cdot 10 + a - 10^3 \cdot a \equiv \overline{abc} \cdot 10 \equiv 0 \ (37).$$

Аналогично получаем, что $\overline{cab} | 37$.

39) Даны два трехзначных числа, дающие одинаковые остатки при делении на 7. Приписав одно из чисел к другому, получаем некоторое шестизначное число. Докажите, что оно делится на 7.

Имеем

$$N_1=\overline{abc};\quad N_2=\overline{def};\quad N_1\equiv N_2\ (7).$$

Поэтому

$$N=\overline{N_1N_2}=10^3N_1+N_2\equiv N_2-N_1\equiv 0\ (7)\Rightarrow N|7.$$

40) Число a дает остаток r_1 при делении на m, а число b — остаток r_2 при делении на m. Можно ли утверждать, что число $a+b$ дает остаток r_1+r_2 при делении на m, а число ab — остаток r_1r_2 при делении на m? Как изменить формулировку, чтобы получить верное утверждение?

По модулю m из $a\equiv r_1$, $b\equiv r_2\Rightarrow a+b\equiv r_1+r_2$, $ab\equiv r_1r_2$; r_1+r_2 и r_1r_2 будут остатками, если эти числа меньше, чем m.

41) Решите задачи № 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31 с помощью доказанных теорем о сравнениях.

См. указанные задачи.

42) Докажите, что ни при каком натуральном n число $3n-1$ не является точным квадратом.

Число $3n-1\equiv -1\,(3)$, в то же время для любого целого a по модулю 3 имеем

$$a\equiv 0,\ \pm 1\Rightarrow a^2\equiv 0,\ 1\Rightarrow a^2\not\equiv -1.$$

Поэтому $a^2\not\equiv 3n-1\,(3)$, откуда следует $a^2\neq 3n-1$.

43) Докажите, что ни при каком натуральном n числа $5n+2$ и $5n-2$ не являются точными квадратами.

Число $5n+2\equiv 2\,(5)$, а $5n-2\equiv -2\,(5)$.

Однако для любого целого a по модулю 5 имеем

$$a\equiv 0,\ \pm 1,\ \pm 2\Rightarrow a^2\equiv 0,\ 1,\ -1\Rightarrow a^2\not\equiv \pm 2.$$

Поэтому $a^2\not\equiv 5n\pm 2\,(5)$, откуда следует $a^2\neq 5n\pm 2$.

44) Докажите, что ни при каком натуральном n числа $7n+3$, $7n-1$, $7n-2$ не являются точными квадратами.

Для любого целого a по модулю 7 имеем

$$a\equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\Rightarrow a^2\equiv 0, 1, 4, 2,$$

так что

$$a^2\not\equiv 7n+3,\ 7n-1,\ 7n-2\ \ (7)$$

и, тем более, не равен числам такого вида.

45) Докажите, что при любом целом $n\geqslant 0$ число $N=5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}$ делится на 19.

$$N=25^n\cdot 2^n\cdot 5\cdot 4+3^n\cdot 4^n\cdot 9\cdot 2=20\cdot 50^n+18\cdot 12^n\equiv 12^n-12^n\equiv 0\ \ (19).$$

46) Дано натуральное число n. Докажите, что найдется число, записываемое только единицами и нулями, которое делится на n.

При делении на n возможно n разных остатков. Поэтому, если на n будем делить $n+1$ чисел

$$1,\ 11,\ 111, \ldots,\ \underbrace{11\ldots 1}_{n+1},$$

то среди их остатков будут и равные, т. е. среди этих чисел будут сравнимые по модулю n. Их разность, которая записывается только единицами и нулями, будет делиться на n.

47) Докажите, что для любых натуральных n и k число $N=1^{2k-1}+2^{2k-1}+\ldots+(2n)^{2k-1}$ делится на $2n+1$.

$$N=1^{2k-1}+2^{2k-1}+\ldots+n^{2k-1}+$$

$$+(2n)^{2k-1}+(2n-1)^{2k-1}+\ldots+(n+1)^{2k-1}.$$

Но по модулю $2n+1$

$$2n\equiv -1,\ 2n-1\equiv -2, \ldots, n+1\equiv -n.$$

Поэтому $N\equiv 0\ \ (2n+1)$.

48) Докажите, что $N=100\ldots 01$, в котором число нулей четное, делится на 11.

$$N=10^{2k+1}+1\equiv 100^k\cdot 10+1\equiv 10+1\equiv 0\ \ (11).$$

49) Найдите остаток от деления $N=7^{100}+11^{100}$ на 13.

По модулю 13 согласно МТФ имеем

$$7^{12}\equiv 1,\ 100=12\cdot 8+4\Rightarrow 7^{100}\equiv 7^4\equiv 6^4\equiv 36^2\equiv 3^2\equiv 9;$$

$$11^{12}\equiv 1,\Rightarrow 11^{100}\equiv 11^4\equiv 2^4\equiv 16;\quad N\equiv 9+16=25\equiv 12\ \ (13).$$

50) Найдите остаток от деления числа $N=6^{592}$ на 11.

По МТФ

$$6^{10}\equiv 1\,(11),\ 592=10\cdot 59+2\Rightarrow N\equiv 6^2\equiv 3\ \ (11).$$

51) Докажите, что число $N=11^{10}-1$ делится на 100.
1-е решение.

$$N=(11-1)(11^9+11^8+\ldots+11+1).$$

Так как по модулю 10

$$11^9+11^8+\ldots+11+1\equiv 0, \text{ то } N|100.$$

2-е решение.

$$11\equiv -1(4)\Rightarrow 11^{10}-1\equiv(-1)^{10}-1\equiv 0\ (4);$$

$$11^2=121\equiv -4(25)\Rightarrow 11^{10}\equiv(-4)^5\equiv -2^{10}\equiv -1024\equiv$$

$$\equiv 1(25)\Rightarrow N|25.$$

Итак, $N|4$, $N|25\Rightarrow N|100$.
52) Какой цифрой оканчивается число $N=777^{777}$?

$$N\equiv 7^{777}(10);\quad 7^2=49\equiv -1(10)\Rightarrow N\equiv(7^2)^{388}\cdot 7\equiv 7\ \ (10).$$

Итак, последняя цифра равна 7.
53) Делится ли число $N=7^{7^{7^7}}-7^{7^7}$ на 10?

$$N\equiv(-3)^{7^{7^7}}-(-3)^{7^7}\equiv -3^{7^{7^7}}+3^{7^7}\equiv -3^{7^7}(3^{7^{7^7}-7^7}-1)\ \ (\mathrm{mod}\ 10).$$

Поскольку $3^4=81\equiv 1(10)$, а $x=7^{7^7}-7^7\equiv(-1)^{7^7}-(-1)^7\equiv 0(4)$, т. е. $x=4k$, имеем

$$N_1=3^{7^{7^7}-7^7}-1=3^{4k}-1=81^k-1\equiv 0\ \ (10)\Rightarrow N|10.$$

54) Какой цифрой оканчивается число $N=14^{14^{14}}$?
По модулю 10 имеем

$$14^3\equiv 4^3\equiv 4\Rightarrow 14^{14}=(14^3)^4\cdot 14^2\equiv 4^4\cdot 4^2\equiv 4^6\equiv 4^2\equiv 6;$$

поэтому $14^{14}=6+10k$. Далее,

$$N=14^{6+10k}\equiv 4^{6+10k}\equiv 2^{12+20k}(10)\Rightarrow N=2N_1;$$

$$N_1=2^{11+20k}(5),\ \ N_1\equiv(2^4)^2 2^3(2^4)^{5k}\equiv 8\equiv 3(5)\Rightarrow N\equiv 6\ \ (10).$$

Итак, N оканчивается цифрой 6.

55) Докажите, что число $N=11^{10^{1967}}-1$ делится на 10^{1968}.
1-е решение. Докажем методом математической индукции, что

$$11^{10^k}-1 \text{ делится на } 10^{k+1}.$$

Для $k=1$ это доказано задачей № 51.
Допустим, что утверждение верно для $k-1$ $(k>1)$, и докажем его справедливость для k.

$$11^{10^k}-1=\underbrace{(11^{10^{k-1}}-1)}_{A}\underbrace{((11^{10^{k-1}})^9+(11^{10^{k-1}})^8+\ldots+1)}_{B}.$$

По условию $A|10^k$; по модулю 10 каждое слагаемое из B сравнимо с 1, поэтому $B\equiv 10\equiv 0$ (10), т. е. $B|10$. Таким образом, $11^{10^k}-1|10^{k+1}$ для любого k. Вследствие этого верно также утверждение задачи.
2-е решение. Воспользуемся теоремой Эйлера: если

$$(a,m)=1, \text{ то } a^{\varphi(m)}\equiv 1(m);$$

$$11^{\varphi(2^k)}=11^{2^{k-1}}\equiv 1(2^k)\Rightarrow 11^{10^{k-1}}\equiv 1(2^k);$$

$$11^{\varphi(5^k)}=11^{4\cdot 5^{k-1}}\equiv 1(5^k)\Rightarrow$$

$$\underbrace{(11^{5^{k-1}}-1)}_{A}\underbrace{(11^{5^{k-1}}+1)}_{B}\underbrace{(11^{2\cdot 5^{k-1}}+1)}_{C}|5^k.$$

Так как $(B,5^k)=1=(C,5^k)$, то $A|5^k$, откуда $11^{5^{k-1}}\equiv 1(5^k)$, и, далее, $11^{10^{k-1}}\equiv 1(5^k)$. Итак, $11^{10^{k-1}}-1|2^k$, $5^k\Rightarrow 11^{10^{k-1}}-1|10^k$.
56) Найдите наименьшее натуральное число, начинающееся с цифры 7 и уменьшающееся впятеро от перестановки этой цифры в конец.
Поскольку после перестановки последняя цифра будет 7, а исходное число в 5 раз больше, то последняя цифра исходного числа равна 5 $(7\times 5=35)$, такой же будет предпоследняя цифра преобразованного числа. Вторая цифра справа в исходном числе равна 8, так как $5\times 5=25$, $25+3=28$.
Дальнейшие рассуждения аналогичны и понятны из следующей схемы:

$$\begin{array}{cccccc} 1\leftarrow & 4\leftarrow & 2\leftarrow & 8\leftarrow & 5\leftarrow & 7\\ & & & & & 5\\ \hline 7 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5\\ (2) & (1) & (4) & (2) & (3) & \end{array}$$

57) Докажите, что число $2222^{5555}+5555^{2222}$[1] делится на 7.
По модулю 7 имеем

$$N\equiv 3^{5555}+4^{2222}\equiv 3^{6\cdot 925+5}+4^{6\cdot 370+2}\equiv 3^5+4^2$$

так как согласно МТФ $3^6\equiv 1\,(7)$, $4^6\equiv 1\,(7)$.

Далее по модулю 7

$$3^2=9\equiv 2,\ 3^4\equiv 4,\ 3^5\equiv 12\equiv 5,\ 4^2\equiv 2,$$

поэтому

$$N\equiv 5+2\equiv 0\ \ (7),\ \text{т. е. } N|7.$$

58) Докажите, что числа n и $n+1$ взаимно просты.

Пусть $(n, n+1)=d$; тогда разность $(n+1)-n=1$ должна делиться на d, а это возможно лишь при $d=1$.

59) Докажите, что при любом натуральном n число $N=2^n+2^{n+1}$ делится на 6.

$$N=2^n(1+2)=6\cdot 2^{n-1}\Rightarrow N|6.$$

60) Докажите, что при любых натуральных a и n число a^n+a^{n+1} делится на $a(a+1)$.

$$N=a^n(a+1)\Rightarrow N|a(a+1).$$

61) Докажите, что при любом нечетном n число $N=n^3-n$ делится на 24.

По следствию МТФ $n^3-n\equiv 0(3)$, остается доказать, что $N|8$.

1-е решение. По условию $n=2k+1\Rightarrow$

$$N=(2k+1)^3-(2k+1)=(2k+1)(4k^2+4k)=4k(k+1)(2k+1).$$

Так как $k(k+1)|2$, то $N|8$.

2-е решение. Учитывая условие, по модулю 8 имеем

$$\begin{array}{l} n\equiv\pm 1,\ \pm 3; \\ n^3\equiv\pm 1,\ \pm 3; \\ \hline n^3-n\equiv\ \ 0,\quad 0,\ \text{т. е. } N|8. \end{array}$$

62) Докажите, что при любом целом n число $N=n^5-n$ делится на 30.

$$N|5\ \ (\text{упр. } 28);\ \ N=(n-1)n(n+1)(n^2+1)\Rightarrow N|6.$$

[1] В пособии имеется знак минус, но в таком случае утверждение неверно.

Поэтому $N|30$.

63) Докажите, что при любом целом n число $N=n(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 24.

Уже доказывалось, что $N|3$. Далее, среди четырех последовательных целых чисел имеются два последовательные четные числа, их произведение делится на 8. Итак, $N|24$.

64) Докажите, что при любом целом n число $N=n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 120.

$N|24$ (см. упр. 63). Далее, при делении на 5 возможно 5 остатков; здесь пять сомножителей дают разные остатки (т. е. они не сравнимы по модулю 5, так как разность любых двух из них отлична от нуля, но меньше 5), следовательно, среди них имеется и 0, поэтому $N|5$.

Итак, $N|24$, $N|5\Rightarrow N|120$.

65) Докажите, что при любом целом a число $N=a^6-a^2$ делится на 60.

$$N=a(a^5-a),\ \ a^5-a|30\ \ (\text{упр. № } 62)\Rightarrow N|30.$$

Но $N=(a-1)aa(a+1)(a^2+1)$, поэтому среди сомножителей имеется и вторая двойка.

Итак, $N|60$.

66) Докажите, что при любом нечетном a число $N=a^4+7(2a^2+7)$ делится на 64.

$$N=(a^2+7)^2=N_1{}^2.$$

Согласно условию $a\equiv\pm 1,\ \pm 3\ (8)$, поэтому $a^2\equiv 1\ (8)$, $a^2+7\equiv 0\ (8)\Rightarrow N_1|8\Rightarrow N|64$.

67) Докажите, что при любом целом a число $N=(a^2+3a+1)^2-1$ делится на 24.

$$N=(a^2+3a)(a^2+3a+2)=a(a+1)(a+2)(a+3),$$

поэтому (см. упр. 63) $N|24$.

68) Докажите, что при любом целом n число $N=n^4+6n^3+11n^2+6n$ делится на 24.

1-е решение. $N=n(n+1)(n+2)(n+3)$, поэтому (см. упр. 63) $N|24$.

2-е решение. По модулю 3 имеем $N\equiv n^4-n^2\equiv n(n^3-n)\Rightarrow N|3$.

По модулю 8 имеем $N\equiv n^4-2n^3+3n^2-2n$.

Ясно, что если $n|8$ или только $n|4$, то $N|8$.

Рассмотрим другие случаи для n по модулю 8.

$$\begin{array}{rrr|r|rrr}
n\equiv\pm1, & \pm2, & \pm3 & -2 & \mp2, & \mp4, & \pm2;\\
n^2\equiv\ \ 1, & 4, & 1 & 3 & 3, & 4, & 3;\\
n^3\equiv\pm1, & 0, & \pm3 & -2 & \mp2, & 0, & \pm2;\\
n^4\equiv\ \ 1, & 0, & 1 & 1 & 1, & 0, & 1;\\
\hline
 & & & N\equiv & 0, & 0, & 0.
\end{array}$$

Итак, $N|8$, $N|3\Rightarrow N|24$.

69) Докажите, что при любых целых a, b число $N=ab(a^2-b^2)(4a^2-b^2)$ делится на 15.

(См. упр. 24, 25.)

70) Докажите, что при любом нечетном x число $N=x^3+3x^2-x-3$ делится на 48.

Согласно условию имеем, если $x=2k+1$,

$$N=(x-1)(x+1)(x+3)=2k(2k+2)(2k+4)=2^3k(k+1)(k+2).$$

Ясно, что $N|3$, $N|16\Rightarrow N|48$.

71) Докажите, что при любом целом n число $N=n(n^4-125n^2+4)$ делится на 120.

По модулю 120 имеем

$$N\equiv n(n^4-5n^2+4)\equiv n(n^2-1)(n^2-4)\equiv$$
$$\equiv(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)\Rightarrow N|120.$$

(См. упр. 64.)

72) Докажите, что при любом целом n число $N=n^5-5n^3+4n$ делится на 120.

(См. упр. 71.)

73) Докажите, что при любом целом a число $N=a^3(a^6-1)$ делится на 504.

$N=a^2(a^7-a)$, $a^7-a|7$ (по следствию из МТФ).

Если $a=2k$, то $N|8$; если $a\neq2k$, то по модулю 8 имеем

$$\begin{array}{rrr}
a\equiv & \pm1, & \pm3;\\
a^2\equiv & 1, & 1;\\
a^6\equiv & 1, & 1;\\
\hline
a^6-1\equiv & 0, & 0.
\end{array}$$

В любом случае $N|8$.

Если $a=3k$, то $N|9$; если $a\neq3k$, то по модулю 9 имеем

$$\begin{array}{rrrr}
a\equiv & \pm1, & \pm2; & \pm4;\\
a^2\equiv & 1, & 4, & -2;\\
a^6\equiv & 1, & 1, & 1;\\
\hline
a^6-1\equiv & 0, & 0, & 0.
\end{array}$$

В любом случае $N|9$.

Таким образом, $N|7\cdot8\cdot9$, т. е. $N|504$.

74) Докажите, что при любом нечетном n число $N=n^8-n^6-n^4+n^2$ делится на 1152.

$$N=n^2(n^2-1)(n^4-1)=n^2(n^2-1)(n^2-1)(n^2+1)=$$
$$=(n-1)^2n^2(n+1)^2(n^2+1).$$

При нечетном n произведение $(n-1)(n+1)|8$, а число $n^2+1|2$, так что $N|2^7$.

Поскольку $(n-1)n(n+1)|3$, то число $N|3^2$.

Итак, $N|9\cdot2^7$, т. е. $N|1152$.

75) При любом ли целом a число $N=a(a^2-1)(a^2-4)$ делится на 720?

$$N=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2).$$

Если $a|3$, но $a\nmid9$, то $N\nmid720$, например, для $a=3$ имеем $N_1=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$, $N_1\nmid720$.

76) Докажите, что при любом целом n число $N=n^2(n^2-1)$ делится на 12.

$$N=(n-1)nn(n+1);\quad (n-1)n|2;\quad n(n+1)|2;$$
$$(n-1)n(n+1)|3\Rightarrow N|12.$$

77) Докажите, что при любом натуральном n число $N=2^n+2^{n+1}+2^{n+2}$ делится на 14.

$$N=2^n(1+2+4)=7\cdot2^n\Rightarrow N|14.$$

78) Докажите, что при любом целом n число $N=2n^6-n^4-n^2$ делится на 36.

$$N=n^2(2n^4-n^2-1)=n^2(n^2-1)(2n^2+1)=$$
$$=(n-1)n^2(n+1)(2n^2+1).$$

Ясно, что $N|4$, так как $(n-1)n|2$, $n(n+1)|2$.

Если $n|3$, то $N|9$; если $n\nmid 3$, т. е. $n\equiv\pm1(3)$, то $n^2\equiv1(3)$, $n^2-1\equiv0(3)$, кроме того, $2n^2+1\equiv0(3)$. Поэтому $N|9$ во всех случаях. Итак, $N|4$, $N|9\Rightarrow N|36$.

79) Докажите, что при любом целом n число $N=6n^5+15n^4+10n^3-n$ делится на 30.

Имеем

$$N\equiv n^4-n\ (2)\Rightarrow N|2;$$

$$N\equiv n^3-n\ (3)\Rightarrow N|3;$$

$$N\equiv n^5-n\ (5)\Rightarrow N|5.$$

Итак, $N|2, 3, 5\Rightarrow N|30$.

80) Докажите, что при любом целом n число $N=n(n^2-1)(n^2-5n+6)$ делится на 120.

Утверждение следует из того, что

$$N=(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1).$$

(См. упр. 64.)

81) Докажите, что при любых целых x, y число $N=(x^2y^3-4x^2y)(x^4+x^2-2)$ делится на 216.

Легко получается, что

$$N=(x-1)x^2(x+1)(x^2+2)(y^3-4y)=f(x)\cdot f_1(y).$$

Имеем

$$f(2k)=(2k-1)4k^2(2k+1)2(2k^2+1)\Rightarrow f(2k)|8;$$

$$f(2k+1)=2k(2k+1)^2 2(k+1)[(2k+1)^2+2]\Rightarrow f(2k+1)|8.$$

Итак, при любых целых x число $N|8$.
Далее, $N=(x^3-x)(x^3+2x)(y^3-4y)$.
Но по модулю 3 имеем

$$x^3-x\equiv0;\quad x^3+2x\equiv x^3-x;\quad y^3-4y\equiv y^3-y\equiv0,$$

поэтому при любых целых x, y число $N|27$.

В итоге получаем $N|216$.

82) Докажите, что при любом целом a число $N=a^7-5a^5+4a^3$ делится на 360. При каких a это число делится на 1080?

$N=a^2N_1$, где $N_1=a^5-5a^3+4a$.

Так как $N_1|120$ (см. упр. 72), то остается найти среди сомножителей N вторую тройку. Она имеется, поскольку

$$N=(a-2)(a-1)a^3(a+1)(a+2).$$

N будет делиться на 1080, если $a=3k$ или если один из сомножителей разложения делится на 9.

83) Докажите, что при любом четном n число $N=n^2(n^2-4)(n^2-16)$ делится на 23040.

При $n=2k$ легко получаем

$$N=2^6(k-2)(k-1)k^2(k+1)(k+2).$$

Но произведение пяти последовательных целых чисел всегда делится на 8 (см. упр. 63), поэтому $N|2^9$.

Далее, $N\equiv n^2(n^2+1)(n^2-1)\equiv n(n^5-n)\equiv0(5)$ и среди сомножителей можно выделить $n^3-4n\equiv n^3-n\equiv0(3)$, кроме того, $n^3-16n\equiv0(3)$.

Итак, $N|2^9\cdot3^2\cdot5$, т. е. $N|23040$.

84) Дробь $\dfrac{a-b}{a+b}$ сократима. Сократима ли дробь $\dfrac{a}{b}$?

Согласно условию $(a-b, a+b)=d>1$.
Поэтому и $2a|d$, $2b|d$, откуда $(2a, 2b)|d$, т. е.

$$2(a, b)|d. \qquad (1)$$

1) $d=2$; тогда, в зависимости от значения (a, b), дробь сократима или несократима.

Например:

$$\frac{47-15}{47+15}=\frac{32}{62}=\frac{16}{31},\quad (32, 62)=2,\quad \frac{47}{15}\text{ — несократимая дробь;}$$

$$\frac{18-16}{18+16}=\frac{2}{34}=\frac{1}{17},\quad (2, 34)=2,\quad \frac{18}{16}\text{ — сократимая дробь.}$$

2) $d>2$; тогда из соотношения (1) следует, что $(a, b)\neq1$, так что дробь $\dfrac{a}{b}$ — сократима.

85) Докажите, что если n и k — натуральные числа, причем k нечетно, то число $N=2(1^k+2^k+\ldots+n^k)$ делится на $n(n+1)$.

Так как $(n, n+1)=1$, достаточно доказать, что $N|n$ и $N|n+1$.

Делимость на n достаточно доказать для $N_1=2(1^k+2^k+\ldots+(n-1)^k)$.

Так как

$$N_1=1^k+2^k+\ldots+(n-1)^k+(n-1)^k+(n-2)^k+\ldots+1^k,$$

причем, из-за нечетности k $1^k+(n-1)^k\equiv0(n)$, $2^k+(n-2)^k\equiv0(n)$ и т. д., то действительно $N_1|n$.

Делимость N на $n+1$ становится очевидной, если записать:

$$N=1^k+2^k+\ldots+n^k+n^k+(n-1)^k+\ldots+1^k$$

и учесть, что в силу нечетности k имеем $1^k+n^k\equiv 0\,(n+1)$,

$$2^k+(n-1)^k\equiv 0\,(n+1) \text{ и т. д.}$$

86) Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 7 и дающее в остатке 1 при делении на 2, 3, 4, 5, 6.

Наименьшее натуральное число, делящееся на 2, 3, 4, 5, 6, равно 60, поэтому искомое число должно иметь вид $60x+1$ и делиться на 7 при условии, что x имеет наименьшее натуральное значение.

Таким образом,

$$60x+1\equiv 0 \ (7)$$

или

$$60x\equiv -1 \ (7);$$

$$4x\equiv -8 \ (7);$$

$$x\equiv -2 \ (7);$$

$$x\equiv \ \ 5 \ (7)$$[1].

Итак, наименьшее натуральное значение для x равно 5, а искомое число — 301.

87) Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 — остаток 2, при делении на 4 — остаток 3, при делении на 5 — остаток 4 и при делении на 6 — остаток 5.

Из условий, с учетом упр. 86, следует, что $x+1=60$, откуда $x=59$.

88) Докажите, что при любом $n\geqslant 0$ число $N=3^{2n+2}+8n-9$ делится на 16.

При $n=2k$ имеем

$$N=3^{4k+2}+16k-9=9\cdot 81^k+16k-9\equiv 0 \ (16),$$

а при $n=2k+1$

$$N=3^{4k+4}+16k+8-9\equiv 81^{k+1}+16k-1\equiv 0 \ (16).$$

В любом случае $N\,|\,16$.

[1] Указанными преобразованиями сравнения мы фактически «решили» его.

89) Докажите, что если число a^2+b^2 делится на 21, то оно делится и на 441.

1-е решение.

Из условия следует, что a^2+b^2 делится на 3 и на 7.

Далее по модулю 3 имеем

$$\left.\begin{matrix} a\equiv 0, \ \pm 1 \\ b\equiv 0, \ \pm 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2\equiv 0, \ 1 \\ b^2\equiv 0, \ 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2+b^2\equiv 0$$

только в том случае, когда $a^2\equiv 0$, $b^2\equiv 0$ (3).

В самом деле,

$$a^2\,|\,3 \Rightarrow a\,|\,3,$$

иначе

$$a\equiv \pm 1\,(3) \Rightarrow a^2\equiv 1\,(3) \Rightarrow a^2\nmid 3$$

вопреки условию. Но $a\,|\,3 \Rightarrow a^2\,|\,9$.

Итак, $a^2+b^2\,|\,9$. Аналогично получаем, что $a^2+b^2\,|\,49$, поэтому $a^2+b^2\,|\,441$.

2-е решение.

Можно воспользоваться результатом упражнения 30. В силу условия задачи необходимо, чтобы $a\,|\,7$, $b\,|\,7$. Аналогично можно установить, что $a\,|\,3$, $b\,|\,3$.

Итак, $a\,|\,21$, $b\,|\,21 \Rightarrow a^2+b^2\,|\,441$.

90) Докажите, что ни при каком целом n число $N=n^2+3n+5$ не делится на 121.

1-е решение.

Допустим, что $N\,|\,121$. Тогда

$$n^2+3n+5-121k=0;$$

$$n=\frac{-3\pm\sqrt{9+4\cdot 11^2k-20}}{2};$$

или

$$n=\frac{-3\pm\sqrt{11\,(44k-1)}}{2}.$$

Необходимо, чтобы $44k-1$ делилось на 11, т. е. чтобы

$$44k-1\equiv 0 \ (11),$$

или

$$-1\equiv 0 \ (11),$$

что невозможно.

2-е решение.

Если $N|121$, то $N|11$ и мы имели бы

$$n^2+3n+5\equiv 0\ (11),$$

или

$$n^2-8n+16\equiv 0\ (10),\ (n-4)^2\equiv 0\ (11)\Rightarrow n-4\equiv 0\ (11)\Rightarrow n=11k+4.$$

Но в таком случае N при делении на 121 дает остаток 33.

91) Сколько существует таких пар натуральных чисел x, y, не превосходящих 1000, что число x^2+y^2 делится на 49? При этом, если $x\neq y$, то пары x, y и y, x считаются различными.

По модулю 7 имеем

$$x,\ y\equiv 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3;$$

$$x^2,\ y^2\equiv 0,\quad 1,\quad 4,\quad 2.$$

Поэтому $x^2+y^2\equiv 0\ (7)$ в том и только в том случае, когда $x^2|7$ и $y^2|7$, откуда $x|7$, $y|7$. В промежутке [1, 1000] каждое из таких чисел принимает $\left[\frac{1000}{7}\right]=142$ значения, а пар имеется 142^2.

92) Числа a и m взаимно просты. Докажите, что если $ad-bc$ делится на m и $a-b$ делится на m, то и число $c-d$ делится на m.

По условию $ad\equiv bc\,(m)$, $a\equiv b\,(m)\Rightarrow ad\equiv ac\,(m)$.

Поскольку $(a,m)=1$, получаем $d\equiv c\,(m)$, т. е. $c-d|m$.

93) Докажите, что если n взаимно просто с числом 6, то n^2-1 делится на 24.

Из условия следует, что $(n,2)=1$ и $(n,3)=1$. Поэтому имеем по модулю 8

$$n\equiv\pm 1,\ \pm 3\Rightarrow n^2\equiv 1\Rightarrow n^2-1\equiv 0\ (8);$$

далее, согласно МТФ, $n^2\equiv 1\ (3)\Rightarrow n^2-1\equiv 0\ (3)$.

Итак, $n^2-1|24$.

94) Докажите, что числа $2n-1$ и $2n+1$ взаимно просты.

Если $(2n-1,\ 2n+1)=d$, то $(2n+1)-(2n-1)=2|d$. Но d — нечетное, поэтому $d=1$.

95) Докажите, что при любом целом n число $N=n(n^2-49)(n^2+49)$ делится на 30.

По модулям 2, 3 и 5 имеем

$$N\equiv n(n^2-1)(n^2+1)\equiv(n-1)n(n+1)(n^2+1)\equiv n^5-n,$$

отсюда ясно, что $N|2,3,5\Rightarrow N|30$.

96) Докажите, что если a и b взаимно просты, то числа a^2 и b тоже взаимно просты.

1-е решение.

Из условия $(a,b)=1$ следует, что существуют целые числа x и y, такие, что

$$ax+by=1.$$

Поэтому имеем также равенство

$$(ax+by)^2=1,$$

которое можно привести к форме

$$a^2u+bv=1.$$

Но отсюда вытекает, что $(a^2,b)=1$, так как общий делитель d чисел a^2 и b должен делить 1.

2-е решение.

Во-первых,

$$(a,b)=1,\ (a^2,b)=d\Rightarrow a|d.$$

В самом деле,

$$a^2|d,\ ab|d\Rightarrow(a^2,ab)=a(a,b)=a|d;$$

далее, $d=1$, иначе, поскольку и $b|d$, получаем $(a,b)=1|d$, что невозможно при $d>1$.

Замечание. Если считать известной теорему $(a,c)=1,\ (b,c)=1\Rightarrow(ab,c)=1$, или теорему единственности разложения на простые множители, то утверждение задачи имеет тривиальный характер.

97) Докажите, что если a и b взаимно просты, то при любых натуральных m и n числа a^m и b^n тоже взаимно просты.

Согласно упр. 96 имеем

$$(a,b)=1\Rightarrow(a^2,b)=1\Rightarrow(a^3,b)=1,\ldots,\Rightarrow(a^m,b)=1;$$

$$(a^m,b)=1\Rightarrow(a^m,b^2)=1,\Rightarrow\ldots,(a^m,b^n)=1.$$

98) Докажите, что если числа a и b взаимно просты, то найдется натуральное m, для которого $a^m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ b)$.

Среди чисел

$$a^1,a^2,\ldots a^b$$

имеются сравнимые по модулю b, так как остатков получается b, но разных не более, чем $b-1$, поскольку $(a,b)=(a^n,b)=1$.

Итак, для некоторых натуральных l и k (пусть $l>k$)

$$a^l \equiv a^k (b).$$

Отсюда, поскольку $(a^k, b)=1$ (см. упр. 97), получаем

$$a^{l-k} \equiv 1 (b),$$

где $l-k=m$ — некоторое натуральное число.

99) Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что для любого n найдется такое число x, что $ax+n$ делится на b.

Если в выражении $ax+n$ вместо x подставим b несравнимых значений по модулю b, то также и получим несравнимые значения по этому модулю.

Иначе из

$$ax_1+n \equiv ax_2+n (b)$$

следовало бы $ax_1 \equiv ax_2 (b)$
и, ввиду того, что $(a, b)=1$,

$$x_1 \equiv x_2 (b),$$

что противоречит условию.

Но b несравнимых значений по модулю b дают при делении на b всевозможные остатки по этому модулю, в том числе и нуль. Таким образом, найдется такое число x, что $ax+n$ будет делиться на b.

100) Докажите, что при любых целых a, b число $N=ab(a^4-b^4)$ делится на 30.

$$N|3 \text{ (см. упр. 24)}, \ N|5 \text{ (см. упр. 26)}.$$

Далее, если a или b делится на 2, то $N|2$; если $a \equiv b \equiv 1$ (2), то и $a^4 \equiv b^4 \equiv 1$ (2), откуда $a^4-b^4|2$.

Итак, $N|30$.

101) Докажите, что при любых целых a, b число $N=a^2b^2(a^4-b^4)(a^4-1)$ делится на 900.

Согласно упр. 100 $ab(a^4-b^4)|30$.

В составе дополняющего до N множителя $ab(a^4-1)$ можно легко выделить сомножители a^2-a, a^3-a и a^5-a, которые делятся соответственно на 2, 3 и 5. Итак, $N|900$.

102) Найдите такое y, что число $N=(y^2+1)x^3+(y^3-1)x$ при любом целом x делится на 6.

Поскольку $x^3 \equiv x (6)$, то

$$N \equiv (y^2+1)x+(y^3-1)x \equiv xy^2(y+1) \pmod 6.$$

На 2 выражение $y(y+1)$ всегда делится. По модулю 3 имеем

$$y \equiv 0, \ \pm 1;$$

$$y^2 \equiv 0, \ 1;$$

$$y^2(y+1) \equiv 0 \ (3) \ \text{при} \ y \equiv 0, \ -1 \ (3).$$

Итак, при любом целом x число $N|6$, если $y \equiv 0, -1$ (3).

103) Существует ли такое натуральное m, что если число a не делится на 7, то $a^m \equiv 1 \pmod 7$?

Согласно МТФ $a^6 \equiv 1$ (7).

104) Докажите, что числа 2^p-1 и 2^q-1 в том и только в том случае взаимно просты, если взаимно просты числа p и q (числа p и q натуральные).

а) $(2^p-1, 2^q-1)=1 \Rightarrow (p, q)=1$.

Иначе из $p=p_1k$, $q=q_1k$, $k>1$ следовало бы, что $(2^k)^{p_1}-1$ и $(2^k)^{q_1}-1$ делятся на число 2^k-1, которое >1, и тогда $(2^p-1, 2^q-1) \neq 1$, вопреки условию.

б) $(p, q)=1 \Rightarrow (2^p-1, 2^q-1)=1$.

Пусть $(2^p-1, 2^q-1)=d>1$. Во всяком случае d — нечетное, т. е. $(2, d)=1$. Поэтому существует наименьшее натуральное $\delta>1$, для которого $2^\delta \equiv 1 (d)$ (см. упр. 98). Покажем, что p и q делятся на δ. Если $p=\delta q+r$, $0<r<\delta$, то получаем $2^p=(2^\delta)^q \cdot 2^r \equiv \equiv 2^r \equiv 1 (d)$, что противоречит определению δ. Следовательно, должно быть $r=0$, т. е. $p|\delta$.

Аналогично заключаем, что $q|\delta$, так что $(p, q) \neq 1$, вопреки условию.

Итак, предположение относительно d неверно, $(2^p-1, 2^q-1)=1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болтянский В. Г., Левитас Г. Г.* Делимость чисел и простые числа. — В сб.: Дополнительные главы по курсу математики 7—8-х классов для факультативных занятий. Составитель К. П. Сикорский. М., «Просвещение», 1969, с. 5—57.

2. *Болтянский В. Г., Левитас Г. Г.* Делимость чисел и простые числа. — В сб.: Дополнительные главы по курсу математики. Учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 7—8-х классов. Составитель К. П. Сикорский. Изд. 2-е. М., «Просвещение», 1974, с. 5—69.